

RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

Expresiones generales: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

Expresiones para sumas y restas de ángulos:

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$

Expresiones para el ángulo doble:

En las expresiones anteriores si $x=y$ obtenemos: $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$

Expresiones para el ángulo mitad:

$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$ $\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$ $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$

Transformaciones de sumas y restas en productos:

$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$ $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$ $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$

$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$ $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

Relaciones de ángulos:

$\sin(p \pm x) = \mp \sin x$ $\cos(p \pm x) = -\cos x$ $\operatorname{tg}(p \pm x) = \pm \operatorname{tg} x$

$\sin(2kp \pm x) = \pm \sin x$ $\cos(2kp \pm x) = \cos x$ $\operatorname{tg}(2kp \pm x) = \pm \operatorname{tg} x$

$\sin\left(\frac{p}{2} \pm x\right) = \cos x$ $\cos\left(\frac{p}{2} \pm x\right) = \mp \sin x$ $\operatorname{tg}\left(\frac{p}{2} \pm x\right) = \mp \operatorname{ctg} x$

$\sin\left(\frac{3p}{2} \pm x\right) = -\cos x$ $\cos\left(\frac{3p}{2} \pm x\right) = \pm \sin x$ $\operatorname{tg}\left(\frac{3p}{2} \pm x\right) = \mp \operatorname{ctg} x$

Funciones Hiperbólicas

$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ $\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x}$ $\operatorname{coth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x}$

Expresiones generales:

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ $\operatorname{sech}^2 x + \operatorname{th}^2 x = 1$

Expresiones para sumas y restas de ángulos:

$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y$ $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$ $\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y}$

Expresiones para el ángulo doble: Haciendo $x=y$ en las expresiones anteriores.

Expresiones para el ángulo mitad:

$\operatorname{sh} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}$ $\operatorname{ch} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}$ $\operatorname{th} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}}$

BINOMIO DE NEWTON:

$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot y + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot y^2 + \dots + \binom{n}{n-1} x \cdot y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$

para determinar $(x-y)^n$ pondremos la expresión del siguiente modo: $[x + (-y)]^n$ y aplicamos la expresión anterior.

Los números combinatorios se calculan mediante la expresión: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

TABLA DE DERIVADAS DE LAS FUNCIONES PRINCIPALES

$y = u \pm v \pm \dots$ $y' = u' \pm v' \pm \dots$

$y = u \cdot v$ $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$y = \frac{u}{v}$ $y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$y = c \cdot u$ $y' = c \cdot u'$

$y = u^n$ $y' = n u^{n-1} \cdot u'$

$y = \log u$ $y' = \frac{u'}{u}$

$y = \log_e u$ $y' = \frac{u'}{u} \log_e e$

$y = e^u$ $y' = u' e^u$

$y = a^u$ $y' = u' a^u \log_a$

$y = \sin u$ $y' = u' \cos u$

$y = \cos u$ $y' = -u' \sin u$

$y = \operatorname{tg} u$ $y' = u' \sec^2 u$

$y = \operatorname{cotg} u$ $y' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$

$y = \operatorname{sec} u$ $y' = u' \operatorname{sec} u \operatorname{tg} u$

$y = \operatorname{arc} \sin u$ $y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$y = \operatorname{arc} \cos u$ $y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} u$ $y' = \frac{u'}{1+u^2}$

$y = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} u$ $y' = \frac{-u'}{1+u^2}$

$y = \operatorname{arc} \operatorname{sec} u$ $y' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$

$y = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} u$ $y' = \frac{-u'}{u\sqrt{u^2-1}}$

$y = \operatorname{sh} u$ $y' = u' \operatorname{ch} u$

$y = \operatorname{ch} u$ $y' = u' \operatorname{sh} u$

$y = \operatorname{th} u$ $y' = u' \operatorname{sech}^2 u$

$y = \operatorname{cth} u$ $y' = u' \operatorname{cosech}^2 u$

$y = \operatorname{sech} u$ $y' = -u' \operatorname{ch} u$

$y = \operatorname{cosech} u$ $y' = -u' \operatorname{cosech} u \operatorname{cth} u$

$y = \operatorname{arg} \operatorname{sh} u$ $y' = \frac{\pm u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$y = \operatorname{arg} \operatorname{ch} u$ $y' = \frac{\pm u'}{\sqrt{u^2-1}}$

$y = \operatorname{arg} \operatorname{th} u$ $y' = \frac{u'}{1-u^2}$

$y = \operatorname{arg} \operatorname{cth} u$ $y' = \frac{-u'}{1-u^2}$

$y = \operatorname{arg} \operatorname{sech} u$ $y' = \frac{-u'}{u\sqrt{1-u^2}}$

$y = \operatorname{arg} \operatorname{cosech} u$ $y' = \frac{-u'}{u\sqrt{1+u^2}}$

INTEGRALES INDEFINIDAS

$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$

$\int (u \pm v \pm \dots) dx = \int u dx \pm \int v dx \pm \dots$

$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$ para $n \neq -1$

$\int \frac{du}{u} = \operatorname{Ln} |u|$

$\int e^u du = e^u$

$\int a^u du = \frac{a^u}{\operatorname{Ln} a}$

$\int \operatorname{sen} u du = -\cos u$

$\int \cos u du = \operatorname{sen} u$

$\int \sec^2 u du = \operatorname{tg} u$

$\int \operatorname{cosec}^2 u du = -\operatorname{cotg} u$

$\int \operatorname{senh} u du = \operatorname{cosh} u$

$\int \operatorname{cosh} u du = \operatorname{senh} u$

$\int \operatorname{tgh} u du = \operatorname{Ln}(\operatorname{cosh} u)$

$\int \operatorname{cotgh} u du = \operatorname{Ln}(\operatorname{senh} u)$

$\int \operatorname{sech}^2 u du = \operatorname{th} u$

$\int \operatorname{cosech}^2 u du = -\operatorname{coth} u$

$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right)$

$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Ln}\left(\frac{u-a}{u+a}\right)$

$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen}\left(\frac{u}{a}\right)$

$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \operatorname{Ln}\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right)$

$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{sec}\left|\frac{u}{a}\right|$

EXPR : CIRCUNFERENCIA, ELIPSE, HIPÉRBOLA Y PARÁBOLA

Circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio R	$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$
Elipse de centro (x_0, y_0) y semiejes a y b	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$
Hipérbola de centro (x_0, y_0) y eje principal paralelo a eje OX:	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$
Parábola de eje paralelo al eje OX y vértice (x_0, y_0) :	$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$ Si $p > 0$ hacia la derecha, si $p < 0$ hacia la izquierda
Parábola de eje paralelo al eje OY y vértice (x_0, y_0) :	$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$ Si $p > 0$ hacia arriba, si $p < 0$ hacia abajo
Algunas cuádricas de uso frecuente:	
Esfera de centro (x_0, y_0, z_0) y radio R	$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$
Elipsoide de centro (x_0, y_0, z_0) y semiejes a, b y c:	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$
Cilindro elíptico de eje OZ:	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Cono elíptico de eje OZ:	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$
Hiperboloide de una hoja:	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
Hiperboloide de dos hojas:	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
Paraboloide elíptico:	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$
Paraboloide hiperbólico:	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$

DESARROLLO EN SERIE DE FUNCIONES

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$
$\cos x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots$
$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$
$\arcsen x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} - \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$
$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1}x + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + \dots$

TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$$\mathcal{L}[f(s)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$$

TRANSFORMADAS		ANTITRANSFORMADAS	
1	$\frac{1}{s} \quad s > 0$	$\frac{1}{s}$	1
x^n	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0$	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a} \quad s > a$	$\frac{1}{s-a}$	e^{ax}
$x^n e^{ax}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad s > a$	$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{x^{n-1} e^{ax}}{(n-1)!}$
sen ax	$\frac{a}{s^2 + a^2} \quad s > 0$	$\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{\text{sen ax}}{a}$
cos ax	$\frac{s}{s^2 + a^2} \quad s > 0$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	cos ax
sh ax	$\frac{a}{s^2 - a^2} \quad s > a $	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\frac{\text{sh ax}}{a}$
ch ax	$\frac{s}{s^2 - a^2} \quad s > a $	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	ch ax

REGLA DE LEIBNITZ PARA DERIVADA N-ÉSIMA DE UN PRODUCTO

$$D^n(u \cdot v) = \binom{n}{0} u (D^n v) + \binom{n}{1} (Du) (D^{n-1} v) + \dots + \binom{n}{n-1} (D^{n-1} u) (Dv) + \binom{n}{n} (D^n u) (v)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \text{sen } nx) \quad \text{Si } T = 2p$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_p^{p+T} f(x) dx; \quad b_n = \frac{1}{T} \int_p^{p+T} f(x) \cos nx dx; \quad c_n = \frac{1}{T} \int_p^{p+T} f(x) \text{sen } nx dx$$

SERIES DE FOURIER

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad \text{Si } T = 2L$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx; \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx; \quad c_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

DISTRIBUCIONES CONTINUAS	FUNCIÓN DE DENSIDAD	MEDIA	VARIANZA	FUNCIÓN GENERATRIZ	REPRODUCTIVA
NORMAL $N(0, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \forall x$	0	1	$e^{-\frac{t^2}{2}}$	
NORMAL (μ, σ)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \forall x$	μ	σ^2	$e^{\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$	es reproductiva respecto a μ y σ^2
UNIFORME $U(a, b)$	$\frac{1}{b-a} \quad a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{1}{t(b-a)} (e^{bt} - e^{at})$	no es reproductiva
GAMMA $\gamma(p, a)$	$\frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax} \quad x > 0$	$\frac{p}{a}$	$\frac{p}{a^2}$	$\left(\frac{a}{a-t}\right)^p$	es reproductiva respecto a p no lo es respecto a a
BETA $\beta(p, q)$	$\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} \quad 0 < x < 1$	$\frac{p}{p+q}$	$\frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$		no es reproductiva

DISTRIBUCIONES DISCRETAS	LEY DE PROBABILIDAD	MEDIA	VARIANZA	FUNCIÓN GENERATRIZ	REPRODUCTIVA
BINOMIAL $B(n, p)$ BERNOULLI = BINOMIAL con $n=1$	$P\{? = x\} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ donde $x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$	pn	$pn(1-p)$	$(q + pe^t)^n$	es reproductiva respecto a n
GEOMETRICA n° de pruebas	$P\{? = x\} = p(1-p)^{x-1}$ donde $x \in \{1, 2, 3, \dots\}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{(1-p)}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-qe^t}$	no es reproductiva
POISSON $P(\lambda)$	$P\{? = x\} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$ donde $x \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$	es reproductiva respecto a λ
HIPERGEOMETRICA	$\frac{\binom{D}{x} \binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} = P\{? = x\}$	$\frac{nD}{N}$	$\frac{nD(N-D)(N-n)}{N^2(N-1)}$		no es reproductiva
BINOMIAL NEGATIVA $k = n^\circ$ de éxitos $r = n^\circ$ de fracasos	$\binom{r+k-1}{r} p^k (1-p)^r =$ $= \binom{r+k-1}{k-1} p^k (1-p)^r = p \binom{r+k-1}{k-1}$ donde $r \in \{1, 2, 3, \dots\}$	$\frac{kq}{p}$	$\frac{kq}{p^2}$	$\left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^k$	es reproductiva respecto a k no es reproductiva respecto a p

SERIES NUMÉRICAS. Criterios de convergencia.

PRINGSHEIM: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n = k \quad (k \neq 0 \wedge k \neq \infty) \begin{cases} p > 1 & \text{converge} \\ p \leq 1 & \text{diverge} \end{cases}$

D'ALEMBERT: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = k \begin{cases} k < 1 & \text{converge} \\ k > 1 & \text{diverge} \\ k = 1 & \text{dudoso} \end{cases}$

CAUCHY: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = k \begin{cases} k < 1 & \text{converge} \\ k > 1 & \text{diverge} \\ k = 1 & \text{dudoso} \end{cases}$

RAABE: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) = k \begin{cases} k > 1 & \text{converge} \\ k < 1 & \text{no converge absolutamte.} \\ k = 1 & \text{dudoso} \end{cases}$

LOGARITMICO: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| \frac{1}{a_n} \right|}{\ln n} = k \begin{cases} k > 1 & \text{converge} \\ k < 1 & \text{no converge absolutamte.} \\ k = 1 & \text{dudoso} \end{cases}$

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Definición: $\{a_n\} / a_n - a_{n-1} = d; \quad d = \text{razón (cte)}$

Término n-ésimo: $a_n = a_1 + (n-1)d$

Suma de los n primeros términos: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Definición: $\{a_n\} / \frac{a_n}{a_{n-1}} = r; \quad r = \text{razón (cte)}$

Suma de los n primeros términos:
Término n-ésimo: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
 $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$

SERIE GEOMÉTRICA

La serie geométrica converge $\Leftrightarrow |r| < 1$ y

su suma es $S = \frac{a_1}{1-r}$