Dinámica de una partícula (traslación)

Leyes de Newton. Definiciones. Consecuencias	
I.	Si $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{cte}$
II.	$\Sigma \mathbf{F} = d\,\mathbf{p} / dt$; donde $\mathbf{p}$ es el momento lineal: $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$; si m = cte, $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$
III.	Ley de acción y reacción
Teorema del momento en forma diferencial	$\mathbf{F} = d\,\mathbf{p} / dt$
Teorema del momento en forma integral	$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int \mathbf{F}\,dt$ (cantidad de movimiento = impulso lineal) Impulso lineal: $I = \int \mathbf{F}\,dt$
Principio de conservación del momento lineal	$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\mathbf{p} = \mathbf{cte}$
Trabajo	$W = \int \mathbf{F}\,d\mathbf{r}$ En 1D y con F (x) = cte: $W = F\,s\cos\theta$
Energía cinética	$Ec = mv^2/2$ (se le suele denotar también por T)
Relación entre el trabajo y la energía cinética	$W = \Delta Ec$
Potencia	$P = d\,W/dt = \mathbf{F}\,\mathbf{v}$
Teorema de la energía en forma diferencial	$\mathbf{F}\,\mathbf{v} = d\,Ec/dt$
Teorema de la energía en forma integral	$\Delta Ec = \int \mathbf{F}\,\mathbf{v}\,dt$

Campos conservativos	
Son aquéllos en que la fuerza deriva de un potencial	$\mathbf{F} = -\nabla Ep$
Su rotacional es nulo	$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$
La circulación (trabajo) es independiente del camino (sólo depende de los puntos inicial y final)	$W(A \rightarrow B) = -\Delta Ep$
El trabajo a través de una trayectoria cerrada es nulo	$W(A \rightarrow A) = 0$
Una dimensión	$F = -d\,Ep/dt$ $Ep = -\int F\,dx + cte$
Estabilidad	Puntos de equilibrio estable: mínimos de la energía potencial Puntos de equilibrio inestable: máximos de la energía potencial
Energía potencia gravitatoria	$Ep = -G\,M\,m/r$ $G = 6.67\ 10^{-11}$ N m^2/kg^2
(Diferencia) de energía potencial gravitatoria (posibilidad de elegir el nivel de energía nulo donde se quiera)	$Ep = m\,g\,h$

Teorema del Virial	
Para el caso en que $Ep = a\,r^{n+1}$	$\langle Ec \rangle = (n+1) \langle Ep \rangle / 2$

Propulsión de cohetes	
$m\,dv/dt = R\,v_e - m\,g$	v_e : velocidad de expulsión de gases $R = \lvert dm/dt \rvert$: tasa constante a la que se quema el combustible

Momento de una fuerza respecto de un punto	**M** = **r** x **F**, donde **r** es el vector que va del punto respecto del que tomamos momentos al origen de la fuerza
Teorema de Varignon	El momento resultante de varios vectores concurrentes respecto a un punto es la suma de los momentos de los vectores componentes respecto al mismo punto.
Fuerza de rozamiento (en movimiento)	$F_r = \mu N$
Fuerza centrífuga	$F_c = m v^2/R$

Condiciones de equilibrio

1. La fuerza externa resultante que actúa sobre el cuerpo debe ser nula	$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$
2. El momento externo resultante respecto a un punto cualquiera debe ser cero	$\Sigma \mathbf{M} = \mathbf{0}$

Unidades (Sistema Internacional)

Momento lineal	kg m /s	$M L T^{-1}$
Fuerza	Newton (N) = kg m/s^2	$M L T^{-2}$
Trabajo, energía cinética, energía potencial	Julio (J) = N m	$M L^2 T^{-2}$
Potencia	watios (w) = J /s En honor al inventor de la máquina de vapor K.Watt (1736 - 1819)	$M L^2 T^{-3}$
Momento de una fuerza	N m	$M L^2 T^{-2}$

Unidades (otros sistemas, relaciones)

Fuerza	dina (CGS), 1 N = 10^5 dinas	
	1 Kp = 9.8 N	
Trabajo	ergio (CGS), 1 J = 10^7 ergios	
Potencia	1 C.V. = 735.5 w	

Dinámica de una partícula (rotación)	
Sólido rígido	Sistema formado por partículas en las que las distancias relativas entre ellas permanecen constantes. Cuando el sólido gira alrededor de un eje fijo, todas sus partículas tienen la misma velocidad y aceleración angular.

Momento de inercia	
Partícula de masa m que gira en torno a un eje a una distancia r	$I = m\, r^2$
Sistema de partículas puntuales	$I = \Sigma\, m_i\, r_i^2$
Sólido rígido	$I = \int r^2\, dm$ donde
distribución lineal (λ es la masa por unidad de longitud)	$dm = \lambda\, dl$
distribución superficial (σ es la masa por unidad de superficia)	$dm = \sigma\, dl$
distribución volúmica (ρ es la masa por unidad de volumen)	$dm = \rho\, dl$
Tensor de inercia	{ I }
Radio de giro K	$I = m\, K^2$
Algunos momentos de inercia (respecto de ejes que pasan por su centro de masas)	
Aro	$Io = m\, R^2$
Aro delgado (alrededor de uno de sus diámetros)	$Io = m\, R^2/2$
Disco o cilindro (respecto de un eje perpendicular al mismo que pasa por su centro)	$Io = m\, R^2/2$
Cilindro hueco de radios R1 y R2	$Io = m\, (R_1^2 + R_2^2)\, /2$
Esfera	$Io = 2\, m\, R^2/5$
Esfera hueca de pared delgada	$Io = 2\, m\, R^2/3$
Barra	$Io = m\, R^2 / 12$
Cono (eje perpendicular a la base que pasa por el vértice)	$Io = 3\, m\, R^2 / 10$
Cilindro de radio R y longitud h (respecto de un eje perpendicular perpendicular a la generatriz)	$Io = m\, R^2 / 2 + m\, h^2 / 12$
Teorema de Steiner (ejes paralelos separados una distancia d). Io es el momento de inercia principal (el que pasa por el centro de masas); I es el momento de inercia no principal	$I = Io + m\, d^2$

Consideremos una partícula puntual de masa m situada en el punto P (x, y, z)	
Momento de inercia respecto del origen	$I_o = m (x^2 + y^2 + z^2)$
Momento de inercia respecto del eje OX	$I_{ox} = m (y^2 + z^2)$
Momento de inercia respecto del eje OY	$I_{oy} = m (x^2 + z^2)$
Momento de inercia respecto del eje OZ	$I_{oz} = m (x^2 + y^2)$
Momento de inercia respecto del plano XY	$I_{xy} = m z^2$
Momento de inercia respecto del plano XZ	$I_{xz} = m y^2$
Momento de inercia respecto del plano YZ	$I_{yz} = m x^2$
Relaciones:	$I_o = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}$
	$2 I_o = I_{ox} + I_{oy} + I_{oz}$
	$I_{ox} = I_{xy} + I_{xz}$ $I_{oy} = I_{xy} + I_{yz}$ $I_{oz} = I_{xz} + I_{yz}$

Momento angular	$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\, \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \{ I \}\, \boldsymbol{\omega}$, donde { I }es el tensor de inercia
	$L_x = I_{xx}\, \omega_x + I_{xy}\, \omega_y + I_{xz}\omega_z$ $L_y = I_{xy}\, \omega_x + I_{yy}\, \omega_y + I_{yz}\omega_z$ $L_z = I_{xz}\, \omega_x + I_{yz}\, \omega_y + I_{zz}\omega_z$
Rotación de un sólido rígido alrededor de un eje arbitrario	$I = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma + 2 I_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2 I_{yz} \cos \beta \cos \gamma + 2 I_{xz} \cos \alpha \cos \gamma$ el vector unitario que señala la dirección del eje es: $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$
Productos de inercia:	$I_{xy} = - \int\int x\, y\, dm$ $I_{xz} = - \int\int x\, z\, dm$ $I_{yz} = - \int\int y\, z\, dm$
Ecuación de la dinámica de la rotación	$\Sigma \mathbf{M} = d\, \mathbf{L} / dt = I\, \boldsymbol{\alpha}$ I es el momento de inercia respecto del punto del que tomamos momentos $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
Principio de conservación del momento angular	Si $\Sigma \mathbf{M} = \mathbf{0}$, $\mathbf{L} = \mathbf{cte}$

	(en ocasiones podremos escribir I ω = cte)
Energía cinética (rotación)	$Ec = (\boldsymbol{\omega}\, \mathbf{L}) / 2 = m\, \omega^2 / 2$
Energía cinética de un sólido rígido que gira alrededor de un eje que pasa por su centro de masas y al mismo tiempo se traslada	$Ec = m\, \omega^2 / 2 + m\, v^2 / 2$
Potencia	$P = M\, \omega$, donde M es el momento de la fuerza
Momento del par aplicado	$M = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$

Dinámica de un sistema de partículas	
Sistema discreto de partículas	Un sistema es discreto cuando está formado por un número finito de partículas, estando éstas localizadas. Masa total: $M = \Sigma\, m_i$
Sistema continuo de partículas	El número de ellas deja de ser finito. Masa total: $M = \int dm$
Centro de masas para un sistema discreto de partículas	$\mathbf{r}_{cm} = \Sigma\, m_i \mathbf{r}_i / \Sigma\, m_i$
Centro de masas para un sólido rígido	$\mathbf{r}_{cm} = \int \mathbf{r} dm / \int dm$
Centro de masas de media circunferencia	$y_{cm} = 2\, R / \pi$
Centro de masas de medio círculo	$y_{cm} = 4\, R / (3\, \pi)$
Parábola $y = b\, x^2 / a^2$ (primer cuadrante)	$x_{cm} = 3\, a / 4$ $y_{cm} = 3\, b / 10$
Triángulo de base B y altura H	$y_{cm} = H / 3$
Velocidad del centro de masas	$\mathbf{v}_{cm} = \Sigma\, m_i \mathbf{v}_i / M$
Masa total del sistema	$M = \Sigma\, m_i$
Posición relativa al centro de masas	$\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm}$
Velocidad relativa al centro de masas	$\mathbf{v}_i' = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{cm}$
Ley de la dinámica para un sistema de	$\mathbf{F}_{ext} = d\, \mathbf{P} / d\, t = M\, \mathbf{a}_{cm}$

partículas	
Principio de conservación de la cantidad de movimiento de un sistema	Si $\mathbf{F}_{ext} = 0$ ==> M $\mathbf{V}_{cm}$
Energía cinética	$Ec = Ec' + M\, v_{cm} / 2$
Momento angular	$\mathbf{L} = \mathbf{L}' + M\, \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm}$
Masa reducida de un sistema de partículas	$\mu = m_1\, m_2\, (m_1 + m_2)$
Colisiones	
En todo choque se conserva el momento lineal **p = cte**	
Elástico (perfecto)	Se conserva además la energía cinética
Inelástico (perfecto)	Los dos cuerpos salen con la misma velocidad
Coeficiente de restitución	$\varepsilon = [v_1' - v_2'] / [v_1 - v_2]$ donde las primas denotan la velocidades tras el choque Si $\varepsilon = 0$: choque inelástico Si $\varepsilon = 1$: choque elástico Si $0 < \varepsilon < 1$: choque intermedio

Movimiento Ondulatorio

Ecuación de ondas	$V^2\, \partial^2 y\,(x, t) / \partial x^2 = \partial^2 y\,(x, t) / \partial t^2$
Solución	$y\,(x, t) = A \operatorname{sen}(k\, x - \omega\, t + \varphi_o)$
si el desplazamiento es nulo en t = 0 y x = 0:	$y\,(x, t) = A \operatorname{sen}(k\, x - \omega\, t)$
También puede escribirse:	$y\,(x, t) = A \operatorname{sen}(\omega\, t - k\, x)$
	Ambas representan una onda que se propaga hacia la derecha (en el sentido de las x crecientes) Si la onda se propaga hacia la izquierda: $y\,(x, t) = A \operatorname{sen}(k\, x + \omega\, t)$ ó $y\,(x, t) = A \operatorname{sen}(\omega\, t + k\, x)$
	$V = \lambda / T = \omega / k$ (velocidad de propagación) $k = 2\pi / \lambda$ (número de ondas); $\omega = 2\pi / T = 2\, \pi\, f$ (pulsación) $T = 1 / f$ (T es el periodo y f la frecuencia)
Velocidad transversal de vibración:	$v = \partial y / \partial t$

Aceleración transversal de vibración:	$a = \partial v / \partial t = \partial^2 y / \partial t^2$
Ondas longitudinales	Las partículas vibran en la dirección de propagación de las ondas (ej. ondas que se propagan en un muelle, el sonido...)
Ondas transversales	Las partículas vibran en dirección perpendicular a la propagación de las ondas (ej. ondas en una cuerda, ondas electromagnéticas...)
Velocidad de propagación	$V = \lambda / T = \omega / k$
- onda transversal (en una cuerda):	$V = [T / \mu]^{1/2}$ T = tensión, μ = densidad lineal de masa (masa por unidad de longitud)
- onda longitudinal (sonido) en un sólido:	$V = [Y / \rho]^{1/2}$ Y = módulo de Young, ρ = densidad volúmica de masa
- onda longitudinal (sonido) en un líquido:	$V = [B / \rho]^{1/2}$ B = módulo de compresibilidad, ρ = densidad volúmica de masa
Velocidad del sonido en un gas:	$V = [\gamma R T / M]^{1/2} = [\gamma P / \rho]^{1/2}$ γ: coeficiente adiabático del gas (para el aire $\gamma = 1.4$) M: peso molecular del gas (para el aire: 28.88 gr / mol) R = 8.31 J / (mol K) = 0.082 atm l / (mol K) = 2 cal / (mol K)
Velocidad de una onda electromagnética en el vacio:	$c = 1 / [\varepsilon_o \mu_o]^{1/2}$ $\mu_o = 4 \pi 10^{-7}$: permeabilidad magnética del vacio $\varepsilon_o = 8.85\ 10^{-12}$: permitividad dieléctrica del vacio o constante dieléctrica

Energía e intensidad del movimiento ondulatorio	
Energía del movimiento ondulatorio	$E = m \omega^2 A^2 / 2 = 2 m \pi^2 f^2 A^2$
Potencia transmitida por una onda armónica sobre una cuerda tensa	$P = \mu V \omega^2 A^2 / 2$
Intensidad del movimiento ondulatorio	$I = E / (t S)$
para ondas esféricas	$I_1 / I_2 = A_1^2 / A_2^2 = r_2^2 / r_1^2$ $A_1 / A_2 = r_2 / r_1$
Intensidad de una onda sonora armónica	$I = \rho V \omega^2 A^2 / 2$ donde A es la amplitud del desplazamiento
Nivel de intensidad	$\beta = 10 \log (I / I_o)$ donde $I_o = 10^{-12}$ w / m^2 El nivel de intensidad se mide en decibelios

Acústica

Intensidad acústica	$I = P_o^2 / [2 \rho_o v]$ donde P_o es la amplitud de la presión acústica
Presión acústica eficaz	$P_e = P_o / \sqrt{2}$
	$P_o = k B \xi_o = \omega \rho_o v \xi_o$, donde ξ_o es el valor máximo del desplazamiento de las partículas
Densidad promedio de energía	$< \rho_w > = \rho_o \omega^2 \xi_o^2 / 2$

Absorción de ondas

Absorción de ondas planas	
Ley de Lambert	$I = Io\, e^{-\beta x}$ donde Io es la intensidad incidente; I es la intensidad emergente; x es el espesor del medio y β el coeficiente de absorción $I_2 = I_1 e^{-\beta (x2 - x1)}$ $A_2 = A_1 e^{-\beta (x2 - x1) / 2}$
Absorción de ondas esféricas	$P_2 = P_1 e^{-\beta (r2 - r1)}$ $I_2 = I_1 (r_1 / r_2)^2 e^{-\beta (r2 - r1)}$

Composición de movimientos ondulatorios

- De la **misma amplitud y frecuencia** (desfase distinto)	$y_1 = A \text{ sen } (\omega t - k x_1)$ $y_2 = A \text{ sen } (\omega t - k x_2)$
	$y = y_1 + y_2 = A' \text{ sen } [\omega t - k (x_1 + x_2)]$
donde	$A' = 2 A \cos [k (x_1 - x_2) / 2]$
Máximos de interferencia: cuando la diferencia de caminos es un número par de semilongitudes de onda	$x_1 - x_2 = 2 n (\lambda / 2)$
Mínimos (nulos) de interferencia: cuando la diferencia de caminos es un número impar de semilongitudes de onda	$x_1 - x_2 = (2 n + 1) (\lambda / 2)$
Doble rendija de Young:	d es la separación entre las rendijas y D la posición de la pantalla donde se observan las franjas de interferencia
Posición de los máximos:	$y^M = 2 n (\lambda / 2) (D / d)$
Posición de los mínimos:	$y^m = (2 n + 1) (\lambda / 2) (D / d)$
Separación entre dos máximos o mínimos consecutivos:	$\lambda D / (2 d)$
- De la **misma amplitud, frecuencia y desfase** (pero	$y_1 = A \text{ sen } (\omega t - k x)$

que se propagan en direcciones opuestas). **Ondas estacionarias**	$y_2 = A \text{ sen } (\omega t + k x)$
	$y = y_1 + y_2 = A' \text{ sen } (\omega t)$
donde	$A' = 2 A \cos (k x)$
Máximos (un número par de cuartas longitudes de onda) - vientres	$x^M = 2 n (\lambda / 4)$
Mínimos (un número impar de cuartas longitudes de onda) - nodos	$y^m = (2 n + 1) (\lambda / 4)$
Separación entre dos máximos o mínimos consecutivos:	$\lambda / 2$
- De **diferente amplitud y desfase, pero de la misma frecuencia**	$x_1 = A_1 \text{ sen } (\omega t + \varphi_1)$ $x_2 = A_2 \text{ sen } (\omega t + \varphi_2)$
	$x = A \text{ sen } (\omega t + \varphi)$ donde
	$A^2 = A_1^2 + A_1^2 + 2 A_1 A_1 \cos (\varphi_1 - \varphi_2)$ $\text{tg } \varphi = [A_1 \text{ sen } \varphi_1 + A_2 \text{ sen } \varphi_2] / [A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \text{ sen } \varphi_2]$
- Composición de M.A.S. de **direcciones perpendiculares**	$x = A \cos (\omega t)$ $y = B \cos (\omega t + \varphi)$
	$x^2 / A^2 + y^2 / B^2 - [2 x y \cos \varphi] / (AB) = \text{sen}^2\varphi$

Ondas estacionarias

Cuerda con extremos fijos	$L = n (\lambda / 2)$ $f_n = [n / (2 L)] v$ donde $n = 1, 2, 3...$ y $v = [T / \mu]^{1/2}$ (velocidad de propagación) frecuencia fundamental o primer armónico ($n = 1$); $f_1 = v / (2 L) \Longrightarrow f_n = n f_1$ primer sobretono o segundo armónico ($n = 2$), etc.
Tubo con ambos extremos abiertos	$f_n = n v / (2 L)$ donde $n = 1, 2, 3...$
Tubo con un extremo cerrado	$f_n = n v / (4 L)$ donde $n = 1, 3, 5...$ (sólo se producen los armónicos impares de la fundamental)

Efecto Doppler

Es el cambio de frecuencia observado por un observador siempre que existe movimiento relativo entre la fuente de frecuencia y el observador.

Cuando el observador y la fuente se mueven el uno hacia el otro	$f' = f (v + v_o) / (v - v_f)$
Cuando el observador y la fuente se alejan el uno hacia el otro	$f' = f (v - v_o) / (v + v_f)$
	siendo v_o la velocidad del observador, v_f la velocidad de la fuente y v la velocidad del sonido. Sólo interesa la componente de la velocidad en la dirección de la recta que une el foco con el observador.

Ondas de choque

Se producen cuando la velocidad de la fuente v_f excede a la velocidad de la onda v.
El frente de ondas cónico que se produce cuendo $v_f > v$ (velocidades supersónicas) se conoce como onda de choque.

Número de Mach	$= v_f / v$

Unidades (Sistema Internacional)		
Potencia	w	
Intensidad	w / m^2	
β: coeficiente de absorción	m^{-1}	