Mecánica

Cálculo de variaciones:
Buscamos una función y (x) que haga extremal la integral

$$\int_{x_1}^{x_2} f[y(x), y'(x), x]\,dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \quad \text{ecuación de Euler}$$

Principio de D´Alembert:

$\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_{\alpha}^{(a)} . \delta \vec{r}_{\alpha} = 0$ (cuando el trabajo virtual total de las fuerzas de ligadura es nulo).

Caso particular: Teorema de Torricelli (cuando las fuerzas activas son únicamente las gravitatorias): $\delta Z_G = 0$

Ecuaciones de Lagrange:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ donde j = 1, 2, …, n (para un sistema conservativo) y L = T – V es la lagrangiana del sistema.

En general: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$ donde j = 1, 2, …, n y $Q_j = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_{\alpha} \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j}$

Coordenadas cíclicas: $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j = cte$ (momento canónico generalizado)

Ecuaciones de Hamilton:

$H = \sum_{\alpha=1}^{N} p_j \dot{q}_j - L \quad donde \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ es el hamiltoniano del sistema.

Ecuaciones de Hamilton:

$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$	$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$

Si el sistema es conservativo: H = T + V

Transformaciones canónicas o de contacto.
La transformación $P_\alpha = P_\alpha$ (p_α , q_α, t), $Q_\alpha = Q_\alpha$ (p_α , q_α, t) es canónica si $\sum p_\alpha dq_\alpha - \sum P_\alpha dQ_\alpha$ es diferencial exacta.

Ecuación de Hamilton – Jacobi.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_j}, q_j, t\right) = 0$$

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_j}$$

Fuerzas centrales

Fuerza en dirección radial, deriva de una energía potencial	$\mathbf{F} = F(r)\ \mathbf{u}_r = -(d\ Ep / d\ r)\ \mathbf{u}_r$
Sistema conservativo	$E = Ec + Ep = cte$
Momento de un fuerza central	$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ ==> $\mathbf{L} = \mathbf{cte}$ ==> movimiento plano

Ley de Newton de la Gravitación Universal	$\mathbf{F} = -(G\ M\ m / r^2)\ \mathbf{u}_r$
Campo gravitatorio (fuerza por unidad de masa)	$\mathbf{g} = -(G\ M / r^2)\ \mathbf{u}_r$
	$\mathbf{F} = m\ \mathbf{g}$
Potencial gravitatorio	$V = -G\ M / r$
Conservación de la energía	$E = (m\ v^2) / 2 - G\ M\ m / r =$ constante < 0
Conservación del momento angular	$\mathbf{L} = \mathbf{cte} = m\ \mathbf{r} \times \mathbf{v}$
En el afelio y en el perihelio (o apogeo y perigeo):	$m\ r_a\ v_a = m\ r_p\ v_p$
Energía:	$E = (m\ v_r^2) / 2 + L^2 / (2\ m^2\ r^2) - G\ M / r$
Potencial efectivo:	$V_{ef} = L^2 / (2\ m^2\ r^2) - G\ M / r$
Fuerza de atracción gravitatoria igual a la fuerza centrífuga	$G\ M\ m / r^2 = m\ v^2 / r$
Velocidad orbital de un satélite (a una distancia r del centro del planeta)	$v = (G\ M / r)^{1/2}$
Velocidad de escape (para que pueda escapar del campo gravitatorio del planeta)	$v_e = (2\ G\ M / r)^{1/2}$
Variación de g con la latitud (φ) teniendo en cuenta la rotación de la Tierra	$g^2 = (g_o - \omega^2\ R \cos^2 \varphi)^2 + (\omega^2\ R \cos \varphi\ \mathrm{sen}\ \varphi)^2$

Teorema de Gauss. Ecuación de Poisson	
Teorema de Gauss (flujo del campo gravitatorio) forma integral	$\int \mathbf{g}\, d\, \mathbf{s} = -4\pi G m_e$ donde m_e es la masa encerrada por la superficie gaussiana
forma diferencial	div $\mathbf{g} = \nabla \mathbf{g} = -4\pi G \rho$
Ecuación de Poisson del potencial gravitatorio	$\nabla^2 V = 4\pi G \rho$

Campo y potencial creados por una esfera homogénea de radio R y masa M = 4 π R³ ρ / 3

	campo gravitatorio	potencial gravitatorio
puntos exteriores: r > R	$- G M / r^2$	$- G M / r$
superficie: r > R	$- G M / R^2$	$- G M / R$
puntos interiores: r > R	$- G M r / R^3$	$- G M [3 R^2 - r^2] / (2 R^3)$

Leyes de Kepler

I.	Los planetas describen órbitas elípticas (porque E<0) planas (porque **L** = **cte**) alrededor del Sol, situado en uno de sus focos
II.	El vector de posición de cualquier planeta con respecto al Sol barre áreas iguales en tiempo iguales (porque **L** = **cte**)
III.	Los cuadrados de los períodos de revolución son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de la elipse $T^2 = a^3\, 4\pi^2 / G M$
	Si la órbita es circula de radio r: $T^2 = r^3\, 4\pi^2 / G M \Longrightarrow T^2 / r^3 =$ cte Período de revolución de un satélite: $T = 2\pi\, [r^3 / (G M)]^{1/2}$

Constantes y Unidades (Sistema Internacional)

Constante de Gravitación Universal	$G = 6.67259 \cdot 10^{-11}$ m³ / kg s² (N m² / kg²)	
Momento lineal	kg m /s	$M L T^{-1}$
Fuerza	Newton (N) = kg m/s²	$M L T^{-2}$

Trabajo, energía cinética, energía potencial	Julio (J) = N m	$M L^2 T^{-2}$
Potencia	watios (w) = J /s	$M L^2 T^{-3}$
Momento de una fuerza	N m	$M L^2 T^{-2}$
Potencial V	V (voltios)	
Unidades (otros sistemas, relaciones)		
Fuerza	dina (CGS), 1 N = 10^5 dinas	
Trabajo	ergio (CGS), 1 J = 10^7 ergios	
Potencia	1 C.V. = 735.5 w	