Álgebra lineal

Matrices

Rango de una matriz	Orden del mayor menor complementario no nulo.
Matriz regular	det A $\neq$ 0
Diagonal principal	Elementos a_{ii} de la matriz. Si la matriz es cuadrado son los elementos de la diagonal trazada desde el elemento superior izquierda al elemento inferior derecha.
Traza de una matriz cuadrada	Suma de los elementos de la diogonal principal
Matriz diagonal.	Aquella que tiene nulos los elementos nos situados en la diagonal principal.
Matriz triangular superior	Los elementos situados por debajo de la diagonal principal son nulos.
Matriz triangular inferior	Los elementos situados por encima de la diagonal principal son nulos.
Matriz **traspuesta** A^t de una matriz A	Se obtiene cambiando ordenadamente sus filas por sus columnas. Propiedades: $(A^t)^t = A$ $(A\ B)^t = A^t\ B^t$ $(A\ .\ B)^t = B^t\ .\ A^t$
Matriz **simétrica**	Aquella que coindice con su traspuesta $A^t = A$
Matriz antisimétrica	Aquella que coindice con su traspuesta cambiada de signo $A^t = -A$
$A = 1/2\ (A\ A^t)\ 1/2\ (A - A^t)$	Cualquier matriz cuadrada A puede descomponerse de forma única en suma de una matriz simétrica más otra matriz antisimétrica
Matriz **adjunta** A^a de una matriz cuadrada A	Aquella matriz que resulta de sustituir cada uno de sus elementos de la matriz A^t por sus adjuntos respectivos
Adjunto del elemento a_{ij}	Es el determinante que resulta de eliminar la fila y la columna del elemento en cuestión, anteponiendo el signo $(-1)^{i\ j}$
Matriz **inversa** de una matriz cuadrada y regular A	Verifica que: $A\ .\ A^{-1} = A^{-1}.\ A = I$ (matriz identidad) Cálculo: $A^{-1} = A^a\ /\ \det A$

Matrices definidas en el cuerpo de los números complejos

Matriz **conjugada** de una matriz A	Aquella que se obtiene sustituyendo cada elemento por su complejo conjugado (igual parte real, pero la parte imaginaria cambiada de signo)
Matriz **asociada** A* de una matriz A	Conjugada de la traspuesta
Matriz hermítica	A* = A
Matriz antihermítica	A* = - A

A = 1/2 (A A*) 1/2 (A - A*)	Cualquier matriz cuadrada A puede descomponerse de forma única en suma de una matriz hermítica más otra matriz antihermítica
Matriz **unitaria**	Aquella matriz regular que $A^* = A^{-1}$ $A \,.\, A^* = A^* \,.\, A = I$ En una matriz unitaria, la suma de los elementos de una fila o columna por sus conjugados es la unidad y la suma de los elementos de una línea por los conjugados de otra paralela es cero. El valor absoluto del determinante es la unidad.

Potencias de matrices	
Matriz **periódica** de período p	Aquella que verifica que $A^{p\,1} = A$ ($p \in N$)
Matriz **idempotente**	$A^2 = A$ (matriz períodica de período p =1)
Matriz **nilpotente**	$A^p = (0)$
Matriz **involutiva**	$A^2 = I$
Matriz **ortogonal**	Aquella que la inversa coincide con la traspuesta: $A^{-1} = A^t$ En una matriz ortogonal, la suma de los cuadrados de los elementos de cualquier fila o columna es la unidad y la suma de los productos de los elementos de una línea por los correspondientes de otra paralela es cero Su determinante es 1 o -1.

Determinantes

Se llama determinante de una matriz cuadrada A (n x n) a un polinomio cuyos sumandos son todos los posibles productos de n factores (factores que son elementos de A), de tal forma que en todo producto exista uno y solamente un factor de cada fila de A y uno y solamente un factor de cada columna.

El signo de dichos productos es ó - según que las permutaciones que indican los órdenes de las filas y de las columnas sean de la misma o distinta paridad.

Determinante de una matriz 2x2	$\det A = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$
Determinante de una matriz 3x3	$\det A = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\; a_{21}\, a_{32}\, a_{13}\; a_{12}\, a_{23}\, a_{31} - (a_{13}\, a_{22}\, a_{31}\; a_{12}\, a_{21}\, a_{33}\; a_{11}\, a_{23}\, a_{32})$

Propiedades de los determinantes

- El valor de un determinante no varía si se cambian entre sí todas sus filas por sus columnas respectivas.
- Si se cambian entre sí dos líneas paralelas el determinante cambia de signo.
- Si se multiplican todos los elementos de una línea por un mismo número, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.
- Si a una línea le sumamos o restamos una combinación lineal de otras líneas paralelas, el determinante no varía.

Determinante nulo:	Si todos los elementos de una línea son nulos el determinante es cero
	Si tiene dos líneas paralelas iguales, el determinante es nulo.
	Si los elementos de una línea son múltiplos de otra paralelas el determinante es nulo.

	Si en un determinante una línea es combinación lineal de otras paralelas entonces el determinante es nulo.
det (A . B) = det A . det B	

Polinomios de matrices	
Ecuación característica de una matriz cuadrada	det (A - x I) = 0 siendo I la matriz identidad. Toda matriz cuadrada tiene una sola ecuación característica.
Polinomio característico de una matriz cuadrada	p (x) = det (A - x I) Toda matriz cuadrada tiene un solo polinomio característico. El polinomio característico de una matriz descompuesta es el producto de los polinomios característicos de sus células diagonales.
Polinomio característico de una matriz cuadrada de orden 2	p (x) = x^2 - (traza A) x det A
Polinomio característico de una matriz cuadrada de orden 3	p (x) = - x^3 (traza A) x^2 - [a_{11} a_{22} a_{11} a_{33} a_{22} a_{33} - (a_{12} a_{21} a_{13} a_{31} a_{23} a_{32})] x det A
Teorema de Cayley - Hamilton	Toda matriz cuadrada A verifica su ecuación característica (sustituyendo x por A)
Polinomio mínimo de una matriz cuadrada A	Polinomio mónico correspondiente a la ecación matricial de grado mínimo que dicha matriz satisface. El polinomio mínimo de una matriz es único. El polinomio mínimo es un divisor del polinomio característico. El polinomio mínimo de una matriz descompuesta es el mínimo común múltiplo de los polinomios mínimos de sus células diagonales.

Transformaciones elementales	
Transformaciones elementales de filas	- Cambiar una fila por otra; multiplicar una fila por un escalar ó sumar a una fila otra fila multiplicada por un escalar (Lo mismo sucede para las columnas) - Estas tranformaciones no varían las dimensiones ni el rango de la matriz
Matriz **elemental**	Toda matriz cuadrada obtenida de la matriz I mediante operaciones elementales
Matrices **equivalentes**	Dos matrices A y B son equivalentes si puede obtenerse una a partir de la otra. Tienen que tener igual dimensión y rango. Es suficiente que A y B tengan igual dimensión y rango para que sean equivalentes.

Matrices **semejantes**	Se dice que la matriz A es semejante a la B si existe una matriz cuadrada y regular Q tal que B = Q^{-1} A Q Todas las matrices semejantes tienen igual polinomio característico (igual traza y determinante) y mínimo. La condición necesaria y suficiente para que dos matrices sean semejantes es que ambas caractericen al mismo operador lineal en bases distintas.
Matrices **congruentes**	Se dice que la matriz A es semejante a la B si existe una matriz cuadrada y regular Q tal que B = Q^t A Q

- Las matrices semejantes y congruentes son equivalentes.
- Para que dos matrices sean semejantes o congruentes, además de tener igual dimensión y rango, deben ser también matrices cuadradas.

Sistemas de ecuaciones lineales.
Discusión de sistemas. Método de Rouché - Fröbenius

Sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos (m ecuaciones y n incógnitas:

a_{11} x_1 a_{12} x_2 ... a_{1n} x_n = b_1
a_{21} x_1 a_{22} x_2 ... a_{2n} x_n = b_2
...
a_{m1} x_1 a_{m2} x_2 ... a_{mn} x_n = b_m

Matriz A de los coeficientes (dimensiones: m x n): A = [[a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}] , [a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}] , ... , [a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}]]
(cada corchete representa una fila de la matriz)Matriz ampliada A de los coeficientes (dimensiones: m x n 1):
A = [[a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, b_1] , [a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}, b_2] , ... , [a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}, b_m]]

Si rango (A) ≠ rango (A) ==> Sistema **incompatible** (No tiene solución)

Si rango (A) = rango (A) = r ==> Sistema **compatible** (Tiene solución)
- Si r = n ==> Sistema **compatible determinado** (existe una única solución)
- Si r < n ==> Sistema **compatible indeterminado** (existen infinitas soluciones que vendrán dadas en función de n - r parámetros)

Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos:

a_{11} x_1 a_{12} x_2 ... a_{1n} x_n = 0
a_{21} x_1 a_{22} x_2 ... a_{2n} x_n = 0
...
a_{n1} x_1 a_{n2} x_2 ... a_{nn} x_n = 0

A = A ==> rango (A) = rango (A) = r

- Si r = n ==> Sistema **incompatible** (sólo existe la solución trivial, en la que todas las incógnitas valen cero)
- Si r < n ==> Sistema **compatible indeterminado** (existen infinitas soluciones que vendrán dadas en función de n - r parámetros)

Formas bilineales y formas cuadráticas

Formas bilineales

Sean dos espacios vectoriales E = {**x**, **y**, **z** ...} (dim E = n) y E' = {**x'**, **y'**, **z'** ...} (dim E' = m) definidos sobre el mismo cuerpo conmutativo K. Se llama forma bilineal a toda aplicación

E x E' —> K
(**x**, **x'**) —>f (**x**, **x'**)

de E x E' en K que es a la vez lineal en E y en E', es decir, ∀**x**, **y**∈ E, ∀**x'**, **y'**∈ E', ∀ λ, μ∈ K,

I. f (λ **x** μ**y**, **x'**) = λ f (**x**, **x'**) μ f (**y**, **x'**)

II. $f(\mathbf{x}, \lambda \mathbf{x'} \mu \mathbf{y'}) = \lambda f(\mathbf{x}, \mathbf{x'}) \mu f(\mathbf{x}, \mathbf{y'})$

Expresión matricial de la forma bilineal

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [x_i]_S \, B \, \{y_i\}_{S'}$$
donde bij = $f(\mathbf{e_i}, \mathbf{e_j}')$

$[x_i]_S$ son las componentes del vector **x** en la base de E (es un vector fila): $S = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots, \mathbf{e_n}\}$
$[y_i]_{S'}$ son las componentes del vector **y** en la base de E' (es un vector columna): $S' = \{\mathbf{e_1}', \mathbf{e_2}', \dots, \mathbf{e_n}'\}$
La matriz B tendrá dimensiones n x m

Cambio de la matriz de la forma bilineal al cambiar las bases
Tenemos inicialmente B_E y $B_{E'}$. La matriz es B_1.
Cambiamos de B_E a B'_E y de $B_{E'}$ a $B'_{E'}$ mediante matrices de paso P_1 y P_2, respectivamente. La nueva matriz será B_2.

$$B_2 = P_1^t B_1 P_2 \text{ (}B_1 \text{ y } B_2 \text{ son matrices equivalentes)}$$

En el caso en que $E' \equiv E \implies P_1 = P_2 = P \implies B_2 = P^t B_1 P$ (B_1 y B_2 son matrices congruentes)

Rango de una forma bilineal: rango de la matriz que caracteriza a la misma

Forma bilineal **degenerada**: cuando la matriz es cuadrada y det B = 0

Forma bilineal **simétrica**: Sean E'□≡□E (B es cuadrada), si $\forall$ **x**, **y** $\in$ E x E', $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. B será simétrica

En una forma bilineal The first step in the opiate detox protocol process involves a thorough assessment that seeks to identify the severity of a person’s addiction and the severity of withdrawal symptoms he or she experiences. simétrica se dice que **x** e **y** son **conjugados** cuando $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$

El producto escalar $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ es una forma bilineal simétrica

Formas cuadráticas

Si en la forma bilineal simétrica $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [x_i] \, B \, \{y_i\}$ hacemos $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, resultará $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = [x_i] \, B \, \{x_i\}$, a la que denominaremos **forma cuadrática** y representaremos por $f_c(\mathbf{x})$. B será una matriz simétrica.
E —> K
x —>$f_c(\mathbf{x}) = [x_i] \, B \, \{x_i\}$

A la forma bilineal simétrica $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se le denomina forma polar de la forma cuadrática $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} [f_c(\mathbf{x}\ \mathbf{y}) - f_c(\mathbf{x}) - f_c(\mathbf{y})]$

Al determinante de B se le denomina discriminante de la forma cuadrática.

Toda forma cuadrática es una función homogénea de grado 2.

En toda transformación ortogonal (matriz de paso ortogonal), el discriminante $|B|$ de la forma cuadrática es un invariante.

Diagonalizar una forma cuadrática es transformarla en otra equivalente, de modo que la matriz simétrica que la caracterice sea diagonal. A la expresión resultante $f_c(\mathbf{x}) = c_{11} x_1^2 \, c_{22} x_2^2 \dots c_{nn} x_n^2$ se le denomina forma canónica de la forma cuadrática.

Clasificación de las forma cuadráticas:

Definida positiva, $\forall$ **x** $\in$ E / **x** $\neq$ **0**, f_c (**x**) > 0	Todos los valores propios son positivos
Semidefinida positiva, $\forall$ **x** $\in$ E / **x** $\neq$ **0**, f_c (**x**) $\geq$ 0	Valores propios positivos y nulos
Definida negativa, $\forall$ **x** $\in$ E / **x** $\neq$ **0**, f_c (**x**) < 0	Todos los valores propios son negativos
Semidefinida negativa, $\forall$ **x** $\in$ E / **x** $\neq$ **0**, f_c (**x**) $\leq$ 0	Valores propios negativos y nulos
Indefinida, $\forall$ **x** $\in$ E / **x** $\neq$ **0**, f_c (**x**) >< 0	Valores propios positivos y negativos (al margen de que haya o no nulos)

Cónicas

Cónicas (de ejes paralelos a los ejes cartesianos)	
Circunferencia	Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.
Ecuación de una circunferencia de centro el punto $C(x_o,y_o)$ y radio R. Cartesianas:	$(x - x_o)^2 (y - y_o)^2 = R^2$
Paramétricas:	$x = x_o R \cos t$ $y = y_o R \operatorname{sen} t$
Excentricidad:	$\varepsilon = 0$
Elipse	Lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante, real y positiva.
Ecuación de una elipse de centro el punto $C(x_o,y_o)$ y semiejes a y b. Cartesianas:	$(x - x_o)^2 / a^2 (y - y_o)^2 / b^2 = 1$
Paramétricas:	$x = x_o a \cos t$ $y = y_o b \operatorname{sen} t$
Excentricidad:	$\varepsilon = c / a < 1$ $c = (a^2 - b^2)^{1/2} / a$

Ecuación en polares:	$\rho = p / (1 - \varepsilon \cos \varphi)$ donde $p = b^2 / a$
Recta tangente a la elipse en el punto $P(x_o,y_o)$:	$(x \,.\, x_o) / a^2 (y \,.\, y_o) / b^2 = 1$
Hipérbola	Lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante, real y positiva.
Ecuación de una hipérbola centro el punto $C(x_o,y_o)$ y semiejes a y b. Cartesianas:	$(x - x_o)^2 / a^2 - (y - y_o)^2 / b^2 = 1$
Excentricidad:	$\varepsilon = c / a > 1$ $c = (a^2 b^2)^{1/2} / a$
Ecuación en polares:	$\rho = p / (1 - \varepsilon \cos \varphi)$ donde $p = b^2 / a$
Parábola	Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta directriz.
Ecuación de una parábola (de eje y)	$y = a x^2 b x c$
Ecuación de una parábola (de eje x)	$x = a y^2 b y c$
Excentricidad:	$\varepsilon = 1$

Ecuación en polares:	$\rho = p / (1 - \cos \varphi)$ donde p se obtiene de la expresión de la parábola escrita como: $y^2 = 2 p x$

Expresión matricial de la cónica	
Ecuación general	$f(x, y) = a_{11} x^2 a_{22} y^2 a_{33} 2 a_{12} x y 2 a_{13} x 2 a_{23} y$
Expresión matricial	
Centro	Solución del sistema $\partial f / \partial x = 0$ $\partial f / \partial y = 0$
	$(A_{31} / A_{33} , A_{32} / A_{33})$
Pendientes de los ejes de una cónica	$a_{12} m^2 - (a_{22} - a_{11}) m - a_{12} = 0$
Vértices	Intersección de los ejes con la cónica

<table>
<tr><td colspan="4">Clasificación general de las cónicas
$|A|$ es el determinante de A ; A_{33} el adjunto del elemento a_{33} ...)</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">No degeneradas ($|A| \neq 0$)</td><td>$A_{33} > 0$</td><td>Elipse (imaginaria si $a_{11} . |A| > 0$)</td></tr>
<tr><td>$A_{33} < 0$</td><td>Hipérbola (siempre real)</td></tr>
<tr><td>$A_{33} = 0$</td><td>Parábola (siempre real)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Degeneradas ($|A| = 0$)</td><td rowspan="3">rango = 2</td><td>$A_{33} > 0$</td><td>Elipse degenera en dos rectas (siempre imaginarias)</td></tr>
<tr><td>$A_{33} < 0$</td><td>Hipérbola degenera en dos rectas (siempre reales)</td></tr>
<tr><td>$A_{33} =$</td><td>Parábola degenera en dos rectas paralelas (imaginarias si</td></tr>
</table>

		0	$A_{22} > 0$)
	rango = 1	A_{33} = 0	Parábola degenera en una recta (siempre real)

Forma canónica de las cónicas	
Elipse o hipérbola	$\lambda_1 x''^2 \lambda_2 y''^2 \lvert A \rvert / A_{33} = 0$ donde λ_1 y λ_2 son los valores propios de A_{33}
Parábola	$(a_{11}\ a_{22})\ y''^2 \pm [-\lvert A \rvert / (a_{11}\ a_{22})]^{1/2}\ x'' = 0$
Invariantes en una cónica	Traza de A_{33} $\lvert A \rvert$