Geometría analítica

Plano

Ecuación de una **recta** (m es la pendiente y n la ordenada en el origen)	$y = m x + n$
Ecuación de una recta conocido un punto $P(x_o,y_o)$ y la pendiente m	$y - y_o = m (x - x_o)$
Ecuación de la recta tangente a una curva f(x) en un punto $P(x_o,y_o)$	$y - y_o = f'(x_o) (x - x_o)$
Relación entre las pendientes m_1 y m_2 de dos rectas perpendiculares	$m_1 = - 1 / m_2$
Ángulo formado por dos rectas a partir de sus pendientes	$\operatorname{tg} \varphi = (m_1 - m_2) / [1 + (m_1 m_2)]$
Distancia entre dos puntos: $P_o (x_o,y_o)$ y $P_1 (x_1,y_1)$	$d = [(x_1 - x_o)^2 + (y_1 - y_o)^2]^{1/2}$
Distancia del punto $P (x_o,y_o)$ a la recta $A x + B y + C = 0$	$d = \| A x_o + B y_o + C \| / (A^2 + B^2)^{1/2}$

Puntos notables de un triángulo

Incentro	Punto donde se cortan las bisectrices
Circuncentro	Punto donde se cortan las mediatrices
Baricentro	Punto en el que se cortan las medianas
Ortocentro	Punto en el que se cortan las alturas

Espacio

recta que pasa por el punto $P (x_o, y_o, z_o)$ y tiene por vector director el **v** (v_x, v_y, v_z)

Ecuación vectorial	$(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + t (v_x, v_y, v_z)$ donde t es el parámetro
Ecuaciones paramétricas	$x = x_o + t v_x$ $y = y_o + t v_y$ $z = z_o + t v_z$
Ecuaciones contínuas	$(x - x_o) / v_x = (y - y_o) / v_y = (z - z_o) / v_z$
Recta como intersección de dos planos	$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$

Cálculo vectorial

Vectores

	$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$
Módulo de un vector	$\| \mathbf{a} \| = a = [a_x^2 + a_y^2 + a_z^2]^{1/2}$
Suma de dos vectores **a** y **b**	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x) \mathbf{i} + (a_y + b_y) \mathbf{j} + (a_z + b_z) \mathbf{k}$
Diferencia de dos vectores **a** y **b**	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x) \mathbf{i} + (a_y - b_y) \mathbf{j} + (a_z - b_z) \mathbf{k}$
Producto de un vector **a** por un escalar α	$\alpha \mathbf{a} = (\alpha a_x \mathbf{i} + \alpha a_y \mathbf{j} + \alpha a_z \mathbf{k})$

Producto escalar	
Definición	**a . b** = a b cos θ ===> da un número
A partir de las componentes	**a . b** = $a_x\ b_x + a_y\ b_y + a_z\ b_z$
Conmutativo	**a . b = b . a**
Producto escalar de dos vectores perpendiculares	**a . b =** 0 si **a** $\perp$ **b**
Ángulo que forman dos vectores	cos θ = **a . b** / (a b)
Producto vectorial	
Definición	**a** x **b** ===> da un vector
Módulo	|**a** x **b**| = a b sen θ
Dirección	Perpendicular al plano formado por los dos vectores
Sentido	Aplicando la regla del sacacorchos al llevar **a** sobre **b** teniendo ambos un origen común
Anticonmutativo	**a** x **b** = - **b** x **a**
Interpretación geométrica	El módulo del producto vectorial nos da el área del rectángulo limitado por los dos vectores
Producto escalar de dos vectores paralelos	**a** x **b = 0** si **a** | | **b**
Producto mixto	
Definición	**a** (**b** x **c**) ===> da un número
Interpretación geométrica	Volumen del paralelepípedo formado por los vectores **a**, **b** y **c**
	1/6 del volumen del tetraedro formado por los vectores **a**, **b** y **c**

Sistemas de Coordenadas en el espacio

Cartesianas: x, y, z	
Elemento diferencial de volumen:	dV = dx dy dz
Rango de variación de las variables para recorrer todo el espacio:	x: $-\infty$ a $+\infty$ y: $-\infty$ a $+\infty$ z: $-\infty$ a $+\infty$
Cilíndricas: ρ, θ (ángulo con el eje x), z	
Paso de cilíndricas a cartesianas:	$x = \rho \cos\theta$ $y = \rho\ \text{sen}\ \theta$ $z = z$
Paso de cartesianas cilíndricas:	$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ $\theta = \text{arc tg}\ (y / x)$ $z = z$

Jacobiano: $J = D(x, y, z) / D(\rho, \theta, z)$	$\lvert J \rvert = \rho^2$
Elemento diferencial de volumen:	$dV = \rho^2 \, d\rho \, d\theta \, dz$
Rango:	ρ: 0 a $+\infty$ θ: 0 a 2π z: $-\infty$ a $+\infty$
Esféricas: r, φ (ángulo con el eje z), θ (ángulo de la proyección sobre el plano $z = 0$ con el eje x)	
Paso de esféricas a cartesianas:	$x = r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta$ $y = r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta$ $z = r \cos \varphi$
Paso de cartesianas a esféricas:	$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ $\theta = \operatorname{arc\,tg}(y / x)$ $\varphi = \operatorname{arc\,cos}[z / (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}]$
Jacobiano: $J = D(x, y, z) / D(r, \varphi, \theta)$	$\lvert J \rvert = r^2 \operatorname{sen} \varphi$
Elemento diferencial de volumen:	$dV = r^2 \operatorname{sen} \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi$
Rango:	r: 0 a $+\infty$ θ: 0 a 2π φ: 0 a π:

Movimientos en el plano y en el espacio

Movimientos rígidos en R^2

$[x' \; y']^t = [b_1 \; b_2]^t + (A) \, [x, y]^t$

donde A es una matriz 2 x 2: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

rango (A - I)	**Puntos fijos**	**Tipo de movimiento**
2	un punto fijo	Rotación de centro el punto fijo
1	no hay puntos fijos	Simetría deslizante (simetría compuesta con una traslación en la que el vector de traslación es paralelo al eje de simetría)
1	recta de puntos fijos	Simetría respecto de la recta de puntos fijos
0	no hay puntos fijos	Traslación
0	todos los puntos son fijos	Identidad

Movimientos rígidos en R^3		
$[x', y', z']^t = [b_1\ b_2\ b_3]^t + (A)\,[x, y, z]^t$ donde A es una matriz 3 x 3: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$		
rango (A - I)	**Puntos fijos**	**Tipo de movimiento**
3	un punto fijo	Composición de un giro y una simetría; el eje de giro y el plano de simetría son perpendiculares y se cortan en el punto fijo
2	no hay puntos fijos	Movimiento helicoidal
2	una recta de puntos fijos	Rotación de eje la recta de puntos fijos
1	no hay puntos fijos	Simetría deslizante (simetría respecto de un plano seguida de una traslación de vector paralelo al plano de simetría)
1	un plano de puntos fijos	Simetría respecto del plano de puntos fijos
0	no hay puntos fijos	Traslación
0	todos los puntos son fijos	Identidad